جامعة 20 أوت 1955 سكيكدة

كلية التكنولوجيا
الجذع المشترك علوم و تقنيات

مقياس الرياضيات 2

الفضاءات الشعاعية، الدوال الأصلية و التكاملات

المصفوفات و المعادلات التفاضلية .

السنة الجامعية 2019-2020

الفهرس

الفهرس

الفصل الأول

الفضاءات الشعاعية و التطبيقات الخطية

عناوين الفصل :

1.1 الفضاءات الشعاعية

1.1.1 بنية الفضاء الشعاعي

ليكن $(\mathbb{K}, +, .)$ حقل تبديلي ، و لتكن E مجموعة غير خالية .

تعريف 1.1.1.
نقول أن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ إذا زودنا E بعمليتين:
❶ $+$ عملية داخلية تجعل E زمرة تبديلية .
❷ . عملية خارجية معرفة كمايلي:

$$. : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$
$$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha.x$$

تحقق الخواص الأتية:

(i) $$\forall \alpha \in \mathbb{K}; \forall x \in E : (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x.$$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \forall x, y \in E : \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y.$

(iii) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \forall x \in E : (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x).$

(iv) $1.x = x; \forall x \in E.$

تعريف 2.1.1.

a. عناصر E تسمى أشعة أما عناصر $\mathbb{K}$ (الحقل) تسمى سلميات .

b. العنصر الحيادي للعملية $+$ في المجموعة E نرمز له بالرمز 0_E.

c. لما $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ نقول أن E فضاء شعاعي حقيقي .

d. لما $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ نقول أن E فضاء شعاعي عقدي (مركب) .

ملاحظة. كل حقل نصادفه فيمايلي هو حقل تبديلي .

1.2 قواعدالحساب في فضاء شعاعي

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$, $x, y \in E; \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: لدينا:

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \forall x \in E : \alpha.x = 0_E \Leftrightarrow (\alpha = 0_{\mathbb{K}}) \vee (x = 0_E)$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \forall x \in E : (-\alpha).x = (-\alpha.x) = \alpha.(-x).$
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \forall x, y \in E : \alpha.(x-y) = \alpha.(x+(-y)) = \alpha.x - \alpha.y.$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \forall x \in E : (\alpha-\beta).x = (\alpha.x) - (\beta.x).$

مثال 1.2.

1. تشكل الثلاثية $(\mathbb{R}^2, +, .)$ للأشعة الحرة في المستوي الحقيقي فضاء شعاعي و نأخذ كتعميم الثلاثية $(\mathbb{R}^n, +, .)$ هي فضاء شعاعي حقيقي من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ و كذلك بالنسبة للثلاثية $(\mathbb{C}^n, +, .)$ هي فضاء شعاعي مركب من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.
2. الثلاثية $(\mathbb{C}, +, .)$ هي في ان واحد فضاء شعاعي حقيقي و فضاء شعاعي مركب .
3. كل حقل تبديلي هو فضاء شعاعي على نفسه .

1.2.1 الفضاءات الشعاعية الجزئية

ليكن $(E, +, .)$ فضاء شعاعي على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$

تعريف 1.2.1. نقول عن جزء غير خال F من E أنه فضاء شعاعي حزئي من E إذا تحقق الشرطان:
1. $(F, +)$ زمرة جزئية من الزمرة التبديلية $(E, +)$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \forall x \in F : \alpha.x \in F$.

نظرية 1.2.1. ليكن F جزء غير خال من الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ عندئذ لدينا تكافؤ القضايا الاتية:

- $(F, +, .)$ فضاء شعاعي جزئي من $(E, +, .)$.

✓ $\forall (x, y) \in F^2 : (x+y) \in F$.

✓ $\forall \alpha \in \mathbb{K}; \forall x \in F : \alpha.x \in F$.

• $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2; \forall (x, y) \in F^2 : (\alpha.x) + (\beta.y) \in F$.

ملاحظة.

1. $\{0_E\}$ العنصر الحيادي ل E هو فضاء شعاعي جزئي من E و ينتمي لكل فضاء شعاعي جزئي منه .
2. لإثبات أن $F \neq \phi$ تأكد أن $0_E \in F$.

مثال 2.2. ليكن

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R} \right\}; F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}; F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}; x \leq 0, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

♦ هل F_1, F_2, F_3 لها بنية فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$؟.

(1) $$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_1^2 : \alpha X + \beta Y \in F_1$$

$$\alpha X + \beta Y = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_1 \checkmark$$

✓بماأن $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F_1$ فإن $F_1 \neq \emptyset$. $\Leftarrow$ F_1 فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

(2) $0_{\mathbb{R}^3} \notin F_2$ و منه F_2 ليس بفضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

(3) ✓$F_3 \neq \emptyset \Leftarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in F_3$

✓من أجل $\alpha = -2; \beta = -3; X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

لدينا $\alpha X + \beta Y = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \notin F_3$. و منه F_3 ليس بفضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

1.2.2 عمليات على الفضاءات الشعاعية

1.2.2.1 التقاطع

ليكن E_1, E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$. نرمز لتقاطع E_1 و E_2 ب :

.

$$E_1 \cap E_2 = \{x \in E : x \in E_1 \wedge x \in E_2\}$$

مثال 3.2. ليكن

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = -2x, z = -x \right\}; F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}.$$

♦ برهن أن F_1 و F_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathbb{R}^3$ ثم أوجد $F_1 \cap F_2$

.

نظرية 2.2.1. تقاطع الفضاءات الشعاعية الجزئية هو فضاء شعاعي جزئي .

1.2.2.2 الإتحاد

ليكن E_1, E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$. فإن: $E_1 \cup E_2 = \{X \in E : X \in E_1 \vee X \in E_2\}$.

نظرية 3.2.1. إتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين ليس بالضرورة فضاء شعاعي جزئي .

1.2.2.3 الجمع

ليكن E_1, E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ فإن: $E_1+E_2 = \{X \in E : X = x_1 + x_2, x_1 \in E_1 \wedge x_2 \in E_2\}$.

نظرية 4.2.1. جمع فضاءين شعاعيين جزئيين هو فضاء شعاعي جزئي .

1.2.2.4 الجمع المباشر

ليكن E_1, E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي E على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$، نقول أن E هو جمع مباشر ل E_1 و E_2 إذا و فقط إذا كان :

(i) $E = E_1 + E_2$.

(ii) $E_1 \cap E_2 = 0_E$.

و نكتب $E = E_1 \oplus E_2$ و نقول أيضا في هذه الحالة أن E_1 و E_2 متكاملين أو إضافيين .

مثال 4.2. ليكن $E_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\right\}; E_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\right\}$

❶ برهن أن E_1 و E_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathbb{R}^2$.

❷ برهن أن $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2$.

❶ واضح .

❷ لدينا: $\mathbb{R}^2 = E_1 \oplus E_2 \iff \begin{cases} E_1 + E_2 = \mathbb{R}^2.........(*) \\ E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\} ....(**) \end{cases}$.

(*) $\mathbb{R}^2 = E_1 + E_2 \iff \mathbb{R}^2 \subset E_1 + E_2 \wedge E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^2$ "محققة".

لنبرهن أن: $\mathbb{R}^2 \subset E_1 + E_2$

ليكن: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. لدينا : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \subset E_1 + E_2$

و منه (*) محققة .

(**) $E_1 \cap E_2 = \left\{X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : X \in E_1 \wedge X \in E_2\right\}$

$X \in E_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \Rightarrow y = 0$. $X \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow x = 0$

و بالتالي $X = 0_{\mathbb{R}^2}$، و منه : $E_1 \cap E_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$ و بالتالي $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$.

1.2.3 العبارة الخطية لمجموعة أشعة

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و : $\forall x, y \in E; \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ الشعاع $v = \alpha x + \beta y \in E$ يسمى عبارة خطية للشعاعين x, y و نعمم ذلك كمايلي:

لتكن $(x_i)_{i\in I}$ مجموعة أشعة من E تسمى عبارة خطية في الأشعة $(x_i)_{i\in I}$ كل عبارة من الشكل: $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i$.

مثال 5.2.
ليكن $E=\mathbb{R}^2$ و $v(1,-1),u_1(5,2),u_2(1,0)$, أكتب v على شكل عبارة خطية للشعاعين u_1,u_2.
لدينا : $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:v=\alpha u_1+\beta u_2=(1,-1)=\alpha(5,2)+\beta(1,0)$

$$(1,-1)=(5\alpha+\beta,2\alpha)\Rightarrow\begin{cases}5\alpha+\beta=1\\2\alpha=-1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1/2\\\beta=7/2.\end{cases}$$

1.2.4 مجموعة الأشعة المولدة - الإستقلال الخطي - الأسس في فضاء شعاعي

تعريف 2.2.1. ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$ و $S=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ أشعة من E، نقول أن الأسرة S تولد الفضاء E إذا كان كل شعاع من E يكتب على شكل عبارة خطية في أشعة S أي :

$$\forall v\in E:\exists\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{K}/v=\sum_{i=1}^{p}\alpha_ix_i.$$

الفضاء الشعاعي الجزئي V من E المؤلف من جميع العبارات الخطية للأشعة $(x_i)_{i=1}^n$ يسمى بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد من مجموعة الأشعة $(x_i)_{i=1}^n$ و نرمز له بالرمز : $V=\langle\{x_i\}\rangle_{i=1}^n$ أو $vect\{x_1,x_2,....\}$ أي:

$$V=\{x\in E:\exists\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{K}:x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n\}.$$

ملاحظة.

(i) الفضاء V هو أصغر فضاء شعاعي جزئي من E.

(ii) للبرهان على أن مجموعة ما عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي E يكفي إيجاد جزء مولد .

مثال 6.2. ليكن $E=\mathbb{R}^2$ و $u(1,2),v(0,-1)$، بين أن $\{u,v\}$ يولدان $\mathbb{R}^2$.
لدينا:
$\forall u,v\in\mathbb{R}^2,\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:w=\alpha u+\beta v/w(x,y)$.

$$w=\alpha(1,2)+\beta(0,-1)\Rightarrow(x,y)=\alpha(1,2)+\beta(0,-1)\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=2\alpha-\beta\end{cases}$$
$$\Rightarrow w=x(1,2)+(-y+2x)(0,-1)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x\\\beta=2x-y\end{cases}$$

1.2.5 الإستقلال و الإرتباط الخطي

تعريف 3.2.1. لتكن $\{(x_i)_{i=1}^n\}$ مجموعة أشعة من الفضاء الشعاعي E على الحقل $\mathbb{K}$ نقول أن $\{x_1,x_2,...x_n\}$ مستقلة خطيا إذا كان:

$$\forall\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{K};\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n=0_E\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=...\alpha_n=0_{\mathbb{K}}.$$

و نقول عن مجموعة الأشعة $\{x_i\}$ أنها مرتبطة خطيا إذا لم تكن مستقلة خطيا بعبارة أخرى: $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in\mathbb{K};\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n=0_E$ و لكن $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ ليست معدومة معا .

ملاحظة. نأخذ إصطلاحا المجموعة الخالية مستقلة خطيا في أي فضاء شعاعي .

مثال 7.2.

(1) الشعاع $v(3,3,1)$ مرتبط خطيا مع الأشعة $u_1(1,1,0),u_2(1,1,1)$ لأن $v=2u_1+u_2$.

(2) هل الأشعة $\{v_1(1,0,0),v_2(0,2,2),v_3(3,7,1)\}$ مستقلة خطيا .
لنبرهن أن: $\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}:\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0.$
لدينا:

$\alpha(1,0,0)+\beta(0,2,2)+\gamma(3,7,1)=(0,0,0) \Leftarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \Leftarrow \begin{cases}\alpha+3\gamma=0\\2\beta+7\gamma=0\\2\beta+\gamma=0\end{cases} \Leftarrow \{v_1,v_2,v_3\}$ مستقلة خطيا .

(3) أوجد قيمة x التي تجعل الأشعة $\{u,v\}$ من $\mathbb{R}^2$ مرتبطة خطيا حيث : $u(3,-2), v(8,x)$.

1.2.6 الأساس و البعد

تعريف 4.2.1. أساس فضاء شعاعي E هو مجموعة أشعة تحقق الخاصيتين :

(i) مستقلة خطيا .

(ii) مولدة للفضاء الشعاعي E.

تعريف 5.2.1. نسمي عدد عناصر أي أساس لفضاء شعاعي E بعد الفضاء الشعاعي E و نرمز له بالرمز $\dim E$.

مثال 8.2 ليكن $E=\mathbb{R}^2, u(1,-1), v(0,3)$ هل $\{u,v\}$ تشكل أساس ل $\mathbb{R}^2$، ثم عين $\dim \mathbb{R}^2$.

(1) $\{u,v\}$ مستقلة خطيا :

$$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R} : \alpha u+\beta v=0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \alpha=\beta=0.$$

$$\alpha(1,-1)+\beta(0,3)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\-\alpha+3\beta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$$

و منه : $\{u,v\}$ مستقلين خطيا .

(2) $\{u,v\}$ تولد $\mathbb{R}^2$؟ . لدينا : $\exists \alpha,\beta\in\mathbb{R} : w=\alpha u+\beta v / w(x,y)$

$(x,y)=\alpha(1,-1)+\beta(0,3) \Rightarrow \begin{cases}\alpha=x\\y=-\alpha+3\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=x\\\beta=1/3(x+y).\end{cases}$ و منه : $\{u,v\}$ تولد $\mathbb{R}^2$، و بالتالي $\dim\mathbb{R}^2=2$.

ملاحظة.

(i) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ يدعى الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^2$.

(ii) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ يدعى الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^3$.

(iii) $\dim\mathbb{R}^n=n$.

نظرية 5.2.1. ليكن E فضاء شعاعي بعده منته معلوم ، و لتكن $\{(x_i)_{i=1}^n\}$ مجموعة أشعة من الفضاء الشعاعي E عندئذ لدينا التكافؤ الأتي:

- جملة الأشعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ تشكل أساسا ل E.
- كل شعاع من E يكتب بصورة وحيدة كعبارة خطية لجملة الأشعة $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

1.2.7 بعد فضاء شعاعي جزئي

ليكن E فضاء شعاعي بعده n $(\dim E < \infty)$ و $F \subset E$ فضاء شعاعي جزئي من E فإن :

(i) $\dim F \leq \dim E$.

(ii) $\dim F = \dim E \Leftrightarrow E = F$.

1.2.8 نظرية البعد

ليكن E فضاء شعاعي بعده منته و F و G فضاء شعاعي جزئي منه فإن :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

ملاحظة. إذا كان: $E = F \oplus G$ فإن : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

1.3 التطبيقات الخطية

1.3.1 تعاريف

تعريف 1.3.1. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل التديلي $\mathbb{K}$ و ليكن التطبيق: $f : E \longrightarrow F$، نقول أن f خطي إذا تحقق مايلي:

(1) $\forall x_1, x_2 \in E; f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

(2) $\forall x \in E : \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

تعريف 2.3.1 (مكافئ).

$$\forall x_1, x_2 \in E; \forall \alpha, \beta \mathbb{K} : f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

ملاحظة.

(1) (f خطي) $\Leftarrow [f(0_E) = 0_F]$.

(2) (f خطي) $\Leftarrow [\forall x \in E : f(-x) = -f(x)]$

(3) $(f(0_E) \neq 0_F) \Leftarrow$ (f ليس خطي).

(4) نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية بين الفضاءين الشعاعين E و F ب $\mathcal{L}(E,F)$.

(5) إذا كان f خطي و $F = \mathbb{R}$ نقول أن f شكل خطي .

(6) اذا كان f خطي و $F = E$ نقول أن f أندومورفيزم .

(7) اذا كان f خطي و تقابلي نقول أن f أيزومورفيزم.

(8) اذا كان f خطي و تقابلي و $F = E$ نقول أن f أتومورفيزم.

مثال 1.3. ♦ بين فيما إذا كانت التطبيقات الأتية خطية:

(i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = ax/a \in \mathbb{R}$.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, X \longmapsto f(X) = (x-y, y-z)$.

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, X \longmapsto f(X) = (x+y-z, 1)$.

(iv) $\varphi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x], p \longmapsto \varphi(p) = p'$.

✍ ليكن $\{e_1 = (1,0,0), e_2(0,1,0), e_3(0,0,1)\}$ الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^3$ و $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تطبيق خطي يحقق :

$$f(e_1) = (1,1); f(e_2) = (1,3); f(e_3) = (2,1)$$

♦ أوجد عبارة التطبيق f؟.

(i) لدينا : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= a(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha a x_1 + \beta a x_2 \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \end{aligned}$$

و بالتالي: f خطي .

(ii) لدينا :

$$\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha f(X_1) + \beta f(X_2).$$

$$\begin{aligned} f(\alpha X_1 + \beta X_2) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2, \alpha y_1 + \beta y_2 - \alpha z_1 - \beta z_2) \\ &= [\alpha(x_1 - y_1) + \beta(x_2 - y_2), \alpha(y_1 - z_1) + \beta(y_2 - z_2)] \\ &= \alpha(x_1 - y_1, y_1 - z_1) + \beta(x_2 - y_2, y_2 - z_2) = \alpha f(X_1) + \beta f(X_2). \end{aligned}$$

و منه f خطي .

(iii) لدينا :

$f(0_{\mathbb{R}^3} = f(0,0,0) = (0,1) \neq (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$. و منه : f ليس تطبيق خطي .

(iv) لدينا : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall p, q \in \mathbb{R}[x] : \varphi(\alpha p + \beta q) = \alpha\varphi(p) + \beta\varphi(q)$

و منه : $\varphi(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)' = \alpha p' + \beta q' = \alpha\varphi(p) + \beta\varphi(q)$.

و بالتالي φ خطي .

♦ لنفرض: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, X \longmapsto f(X) = (A, B)$

بماأن $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساس ل $\mathbb{R}^3$ فإن :

$$\forall X(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : X = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(1,1) + y(1,3) + z(2,1) \\ &= (x + y - 2z, x + 3y + z). \end{aligned}$$

و منه:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2; f(x,y,z) = (x + y + 2z, x + 3y + z).$$

نظرية 1.3.1. ليكن $f : E \longrightarrow F$ خطي .

(i) E_1 فضاء شعاعي جزئي من E $\Leftarrow$ $f(E_1)$ فضاء شعاعي جزئي من F.

(ii) F_1 فضاء شعاعي جزئي من F $\Leftarrow$ $f^{-1}(F_1)$ فضاء شعاعي جزئي من E.

1.3.2 نواة و صورة تطبيق خطي

ليكن $f : E \longrightarrow F$ خطي .

تعريف 3.3.1. نسمي مجموعة العناصر x من E و التي تحقق $f(x) = 0_F$ بنواة التطبيق الخطي f و نرمز له بالرمز $\ker f$ أي :

$$\ker f = \{x \in E : f(x) = 0_F\}.$$

ملاحظة. النواة هي فضاء شعاعي جزئي من E.

تعريف 4.3.1. نسمي مجموعة العناصر y من F و التي هي صور لعناصر من E بصورة التطبيق الخطي f و نرمز له بالرمز $\Im f$ أي :

$$\Im f = \{y \in F; \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

ملاحظة. الصورة هي فضاء شعاعي جزئي من F.

نظرية 2.3.1. ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ و $f : E \longrightarrow F$ تطبيق خطي فإن:

1. f متباين $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$.
2. f غامر $\Leftrightarrow \Im f = F$.

نظرية 3.3.1 (البعد). ليكن E و F فضاء شعاعي و $\dim E = n$ منته و ليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$ لدينا :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \Im f.$$

1.3.3 رتبة تطبيق خطي

نسمي رتبة تطبيق خطي $f : E \longrightarrow F$ بعد صورته أي : $rangf = \dim(\Im f)$.

مثال 2.3.

ليكن : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = x - y$

♦ بين أن f خطي ، عين $\ker f$ و $\Im f$، ماذا تستنتج بخصوص التطبيق f ؟

• لدينا:

$$\ker f = \left\{X \in \mathbb{R}^2; f(X) = 0\right\},$$

$f(X) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \ker f = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1)/x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \ker f = \langle\{1, 1\}\rangle$.

و منه f ليس متباين .

•

$$\Im f = \left\{z \in \mathbb{R}; \exists X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = z\right\}$$

$$f(x, y) = z \Leftrightarrow x - y = z \Leftrightarrow \Im f = \mathbb{R}.$$

و منه f غامر .

الفصل الثاني

حساب الدوال الأصلية و التكاملات

عناوين الفصل :

2.1 الدوال الأصلية

تعريف 1.1.2. لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I. نقول أن F دالة أصلية للدالة f على المجال I إذا و فقط إذا كانت F قابلة للإشتقاق على المجال I و تحقق:

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x).$$

ملاحظة. لتكن f دالة عددية و I مجال :

(i) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي $F + c$ ، $c \in \mathbb{R}^*$.

(ii) إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I و G دالة أصلية ل g على مجال I فإن الدالة $(F + G)$ دالة أصلية للدالة $(f + g)$ على المجال I.

(iii) كل دالة مستمرة على المجال I تقبل دالة أصلية .

جدول لبعض الدوال الأصلية المألوفة

ملاحظات	F	f
$c\in\mathbb{R}$	$x+c$	1
$c\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2+c$	x
$n\in\mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	x^n
$n\in\mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$	$u'u^n$
$c\in\mathbb{R}$	$\arctan x+c$	$\frac{1}{1+x^2}$
$c\in\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$
$c\in\mathbb{R}$	$-\cos x+c$	$\sin x$
$a\neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\cos(ax+b)$
$a\neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\sin(ax+b)$
$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$\tan x+c$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$x>0$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$	$\sqrt{x}$
$c\in\mathbb{R}$	$\ln x+c$	$\frac{1}{x}$
$u(x)\neq 0$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$c\in\mathbb{R}$	$\exp(x)+c$	$\exp(x)$
$c\in\mathbb{R}$	$\exp u(x)+c$	$u'(x)\exp(u(x))$
$a\neq 0$	$\frac{1}{a}\exp(ax)+c$	$\exp(ax)$

مثال 1.1. ✍ عين الدوال الأصلية للدالة $f(x)$ في الحالات الأتية:

(1) $f(x)=x^3 \Leftarrow F(x)=\frac{x^4}{4}+c;\ c\in\mathbb{R}.$

(2) $f(x)=\left(x^2+1\right)^3(2x) \Leftarrow F(x)=\frac{1}{4}\left(x^2+1\right)^4+c;\ c\in\mathbb{R}.$

(3) $f(x)=\exp(3x) \Leftarrow F(x)=\frac{1}{3}\exp(3x)+c;\ c\in\mathbb{R}.$

(4) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1} \Leftarrow F(x)=x-\arctan x+c;\ c\in\mathbb{R}.$

2.2 حساب التكامل

2.2.1 التكامل الغير محدود

نرمز لمجموعة الدوال الأصلية للدالة $f(x)$ ب $\int f(x)dx$ و يسمى بالتكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ أي: $\int f(x)dx = F(x) + c; c \in \mathbb{R}$.

2.2.2 تكامل دالة مستمرة على مجال

تعريف 1.2.2. لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على مجال I و $I \ni a, b$. العدد الحقيقي : $F(b) - F(a)$ حيث : F دالة أصلية للدالة f على المجال I يسمى تكامل الدالة f من a إلى b و نكتب :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

نتيجة 1.2.2.

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$.
2. $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
4. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
5. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx$.
6. لتكن f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a, b]$ و $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$

(ii) $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

ملاحظة.

$$\int f(x).g(x)dx \neq \int f(x)dx. \int g(x)dx.$$

2.3 التفسير الهندسي للعدد $\int_a^b f(x)dx$

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة و موجبة على $[a, b]$ العدد $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز (Δ) المحصور بين المنحنى (γ) و محور الفواصل و المستقيمان $(x = a)$ و $(x = b)$.

2.4 تقنيات حساب التكامل

2.4.1 طريقة استبدال المتغير

لتكن $g(x)$ دالة قابلة للإشتقاق على المجال $]a, b[$ حيث $g'(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$ و لتكن f مستمرة على المجال I بحيث $g([a, b]) \subset I$. إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن: $\forall x \in [a, b] : (F \circ g)'(x) = f[g(x)].g'(x) = F'[g(x)]g'(x).$ أي:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = F \circ g|_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$
$$= F(x)|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

أي: $\int_a^b f[g(x)]\,g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$

ملاحظة. إذا وضعنا $t = g(x)$ فإن: $dt = g'(x)$ و

$$\begin{cases} x = a \Longrightarrow t = g(x) \\ x = b \Longrightarrow t = g(b). \end{cases}$$

مثال 1.4. بوضع : $y = x^3 + 2$ أحسب التكامل : $\int x^2\sqrt{x^3+2}dx$.

لدينا:

$$y = x^3 + 2 \Longrightarrow dy = 3x^2dx \Longrightarrow x^2dx = \frac{dy}{3}$$

و منه:

$$\int x^2\sqrt{x^3+2}dx = \int \frac{dy}{3}\sqrt{y} = \frac{1}{3}\int \sqrt{y}dy = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{9}y^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}\left(x^3+2\right)^{\frac{2}{3}} + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

مثال 2.4. بوضع $t = \cos x$ أحسب التكامل : $\int \cos^4 x \sin x dx.$

2.4.2 طريقة التكامل بالتجزئة

لتكن f و g دالتان قابلتان للإشتقاق على $I =]a, b[$ لدينا:

$$\forall x \in I : (f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Longrightarrow f'(x)g(x) = (f.g)'(x) - g'(x).f(x).$$

$$\forall x \in I : \int_a^b f'(x)g(x)dx = \int_a^b (f.g)'(x)dx - \int_a^b g'(x)f(x)dx \Longrightarrow \int_a^b f'(x)g(x)dx = f.g|_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)dx.$$

و هي عبارة التكامل بالتجزئة .

مثال 3.4. بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكامل : $\int_0^1 x.e^x dx.$

نضع:

$$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1; g'(x) = e^x \longrightarrow g(x) = e^x.$$

$$\int_0^1 x.e^x dx = x.e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

2.5 التكامل و الترتيب

لتكن f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a, b]$:

(1) إذا كانت $f \geq 0$ على المجال $[a, b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(2) إذا كان $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(3) إذا كان $f \leq 0$ و $a \leq b$ فإن $\int_a^b \leq 0$.

(4) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

2.6 مكاملة أنواع خاصة من الدوال

2.6.1 الدوال الأصلية للدوال الكسرية

تعريف 1.6.2. الدوال :

$$x \mapsto \frac{1}{(x-x_0)^k}$$

$$x \mapsto \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k};\ b^2-4ac<0.$$

حيث $k>0$ و $\alpha,\beta,x_0 \in \mathbb{R}$ تسمى عوامل بسيطة من النوع الأول و الثاني على التوالي .

نظرية 1.6.2. ليكن $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود حقيقيين بحيث $\deg P(x) < \deg Q(x)$ فإن : $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ يكتب على شكل مجموع كثير حدود $E(x) \in \mathbb{R}[x]$ و عوامل بسيطة من النوع الأول و الثاني .

مثال 1.6. فكك الكسور الأتية :

1. $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$.
2. $\dfrac{x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$.
3. $\dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

نعين الأعداد A,B,C,D بالمطابقة .

ملاحظة. ليكن كثير الحدود ax^2+bx+c حيث : $b^2-4ac<0$ فالمعادلة لا تقبل حل في $\mathbb{R}$ و يمكن كتابتها على الشكل : $ax^2+bx+c=(ax-\alpha_1)^2+\beta_1^2$ حيث : β_1,α_1 الجزء الحقيقي و التخيلي على التوالي للحلول .

2.6.1.1 مكاملة الدوال ذات عوامل بسيطة من النوع الأول

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^k} = \begin{cases} \ln|x-x_0|+c; & \text{si } k=1, \\ \dfrac{1}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}}+c; & \text{si } k>1. \end{cases}$$

2.6.1.2 مكاملة الدوال ذات عوامل بسيطة من النوع الثاني

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{\alpha x+\beta}{((ax-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^k}dx.$$

بوضع : $x=\alpha_1+\beta_1 t \Longleftarrow dx=\beta_1 dt$ إذن يرجع التكامل إلى حساب التكاملين:

$$I_k=\int \frac{dt}{(1+t^2)^k};\quad J_k=\int \frac{t}{(1+t^2)^k}dt.$$

حساب التكامل J_k

لنضع $du = 2tdt \Longleftarrow u = 1+t^2$ و منه:

$$J_k = \int \frac{dU}{U^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + c; & \text{si } k=1; \\ \frac{1}{2}\frac{1}{(1-k)U^{k-1}} = \frac{1}{2(1-k)(1+t^2)^{k-1}} + c; & \text{si } k>1. \end{cases}$$

حساب التكامل I_k

من أجل $k=1$ فإن : $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + c.$

من أجل $k>1$ نستعمل التكامل بالتجزئة لنضع :

$$\begin{cases} f = \frac{1}{(1+t^2)^k} \longrightarrow f' = \frac{-2kt}{(1+t^2)^{k+1}} \\ g' = 1 \longrightarrow g = t. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_k = \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{k+1}}dt = \frac{t}{(1+t^2)^{k+1}}dt = \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k\int \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{1+k}}dt.$$

$$\Longrightarrow I_k = \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k\int \frac{dt}{(1+t^2)^k} - 2k\frac{dt}{(1+t^2)^{k+1}} = \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}$$

$$\Longrightarrow 2kI_{k+1} = (2k-1)I_k + \frac{t}{(1+t^2)^k}.$$

2.6.2 مكاملة الدوال الجذرية

لمكاملة هذا النوع من الدوال نرجع إلى مكاملة الدوال الكسرية و ذلك بإستعمال طريقة إستبدال المتغير

2.6.2.1 حساب التكامل من الشكل $I = \int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$

حيث R يرمز لدالة كسرية . نضع $x = t^k$ حيث k هو المقام المشترك للكسور $\left(1, \frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}\right)$. لدينا : $x = t^k \Longrightarrow dx = kt^{k-1}dt$ يسمح هذا التبديل بالرجوع إلى كسر .

مثال 2.6 أحسب التكامل $I = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx$. لدينا $k=4$ نضع $x = t^4 \Longleftarrow dx = 4t^3dt$.

$$\Longrightarrow I = 4\int \frac{t^2t^3}{1+t^3}dt = 4\int \frac{t^5+t^2-t^2}{1+t^3}dt = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{1+t^3}\right)dt = 4\int t^2dt - 4\int\frac{t^2}{1+t^3}dt$$

$$\Longrightarrow I = \frac{4}{3}\left[t^3 - \ln\left|1+t^3\right|\right] + c = \frac{4}{3}\left[x^{\frac{4}{3}} - \ln\left|1+x^{\frac{3}{4}}\right|\right] + c.$$

مثال 3.6 أحسب التكامل : $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + ^3\sqrt{x}}$.

2.6.2.2 حساب التكامل من الشكل $I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$

نضع $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث k هو المقام المشترك ل $\left(1, \frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}\right)$.

مثال 4.6. أحسب التكامل $I=\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$. بوضع : $t^2=x+4 \Longleftarrow 2tdt=dx$.

$$I=\int \frac{t}{t^2-4}\times 2tdt=2\int \frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=2\int dt+8\int\frac{dt}{t^2-4}=2\int dt+8\int\frac{dt}{(t-2)(t+2)}$$

$$=2\int dt+8\left[\int\frac{A}{t-2}dt+\int\frac{B}{t+2}dt\right]=2\int dt+8\left[\int\frac{1}{4(t-2)}dt-\int\frac{1}{4(t+2)}dt\right].$$

$$=2t+2\ln|t-2|-2\ln|t+2|+c=2t+2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+c.$$

$$\Longrightarrow I=2\sqrt{x+4}+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+c;\ \ c\in\mathbb{R}.$$

مثال 5.6. أحسب التكامل $I=\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx$.

2.6.2.3 حساب التكامل من الشكل $I=\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx; a\neq 0$

حسب قيم a يمكن إرجاع R إلى تابع كسري باستعمال إستبدال المتغير .

a. $a>0$:

نضع : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t \Rightarrow ax^2+bx+x=ax^2\pm 2\sqrt{a}xt+t^2 \Rightarrow x=\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}t}$

يسمح لنا هذا التبديل بالرجوع إلى دالة كسرية .

مثال 6.6. أحسب التكامل $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

بوضع :

$$\sqrt{x^2+1}=-x+t\Rightarrow x^2+1=x^2-2xt+t^2\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t}\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t^2}dt$$

بالتعويض نجد:

$$I=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{1-t^2}{2t}+t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2(1+t^2)}{t-t^3+2t^3}dt=\int\frac{t^2+1}{t(t^2+1)}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c.$$

$$\Rightarrow I=\ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|+c;\ \ c\in\mathbb{R}.$$

مثال 7.6. أحسب التكامل $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

b. α,β جذرين حقيقيين لـ ax^2+bx+c:

نضع : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t$

$$\Rightarrow ax-a\beta=xt^2-\alpha t^2\Rightarrow ax-t^2x=a\beta-\alpha t^2\Rightarrow x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

يسمح لنا هذا التبديل بالرجوع إلى دالة كسرية .

مثال 8.6. أحسب التكامل $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

نضع : $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{(x+4)(x-1)}=t(x+4)$

و منه:

$$\Rightarrow (x+4)(x-1) = t^2(x+4)^2 \Rightarrow (x-1) = t^2(x+4) \Rightarrow x-1 = t^2x + 4t^2 \Rightarrow x(1-t^2) = 4t^2+1$$

$$\Rightarrow x = \frac{4t^2+1}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}dt$$

$$I = \int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}}{\left(\frac{4t^2+1}{1-t^2}+4\right)t}dt = \int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}}{\frac{(4t^2+1+4-4t^2)t}{1-t^2}}dt = \int \frac{10t}{(1-t^2)^2} \times \frac{1-t^2}{5t}dt = 2\int \frac{dt}{1-t^2}dt$$

$$I = 2\int \left(\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}\right)dt \Rightarrow I = \left(\int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt = -\ln(1-t) + \ln(1+t) + c; c \in \mathbb{R}.$$

$$I = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = \ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4}}{1-\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4}}\right| + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

مثال 9.6. أحسب التكامل $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{-x^2+7x-10}^3}dx$.

2.6.3 مكاملة الدوال من النوع $\int R(\sin x, \cos x)dx$

بوضع : $t = \tan\frac{x}{2}$ نجد: $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$؛ $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$؛ $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

مثال 10.6. أحسب التكامل $I = \int \frac{dx}{\sin x}$

لدينا :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c;\quad c \in \mathbb{R}.$$

مثال 11.6. أحسب التكامل $I = \int \frac{dx}{\cos x}$.

ملاحظة. في أغلب الأحيان التبديل $t = \tan\frac{x}{2}$ يؤدي ألى حسابات معقدة لذا يمكننا إستعمال تبديلات أخرى:

1. إذا كانت $R(\cos x, \sin x)$ فردية بالنسبة للمتغير الأول أي: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ نأخذ $t = \cos x$.
2. إذا كانت $R(\cos x, \sin x)$ فردية بالنسبة للمتغيرالثاني أي: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ نأخذ $t = \sin x$.
3. إذا كانت $R(\cos x, \sin x)$ زوجية بالنسبة للمتغيرين أي: $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ نأخذ $t = \tan x$.

مثال 12.6. 1. بإستعمال المتغير المناسب أحسب التكامل: $I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$.

لدينا $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ أي: $\frac{(-\sin)^5 x}{\cos x} = -\frac{\sin^5 x}{\cos x}$.

حسب ما سبق نأخذ: $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. لدينا : $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$.

$$I = -\int \frac{-(1-2\cos^2 x + \cos^4 x)}{\cos x}(\sin x)dx = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t}dt = -\int \left(\frac{1}{t} - 2t + t^3\right)dt$$

$$= -\ln|t| + t^2 - \frac{1}{4}t^4 + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow I = \int -\ln|\cos x| + \cos^2 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

2. بإستعمال المتغير المناسب أحسب $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

لدينا : $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. أي : $\frac{(-\sin x)^2 x}{(-\cos x)^4 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$. حسب ما سبق نأخذ $t = \tan x$.

$$t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx;\ \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x)dx \Rightarrow dt = (1 + t^2)dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{1 + t^2}dt$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)dx = \int t^2(1 + t^2)\frac{dt}{1 + t^2} = \frac{t^3}{3} + c;\ \ c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + c;\ \ c \in \mathbb{R}.$$

3. بإستعمال المتغير المناسب أحسب $I = \int \frac{1 + \sin^3 x}{\cos^3}dx$.

2.6.4 مكاملة الدوال من النوع $\int R(\exp x)dx$

نضع : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$.

مثال 13.6. أحسب $I = \int \frac{dx}{e^x + 1}$.

لنضع : $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t(1 + t)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1 + t} = \ln\left|\frac{t}{1 + t}\right| + c;\ \ c \in \mathbb{R};$

$$I = \ln\left|\frac{e^x}{1 + e^x}\right| + c;\ \ c \in \mathbb{R}.$$

ملاحظة. نكامل $\int e^{\alpha x}P_n(x)dx$ حيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n و $\alpha \in \mathbb{R}$ على الشكل $\int e^{\alpha x}P_n(x)dx = Q_n(x)e^{\alpha x} + c$ حيث $Q_n(x)$ كثير حدود درجته تساوي درجة $P_n(x)$.

مثال 14.6. أحسب التكامل $I = \int (x^2 + x + 1)e^{-x}dx$.

لنفرض $I = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ بالإشتقاق نجد:

$$(2ax + b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2 + bx + c) = e^{-x}\left[2ax + b - (ax^2 + bx + c)\right] = e^{-x}\left[2ax + b - ax^2 - bx - c\right]$$
$$= e^{-x}\left[x(2a - b) - ax^2 + b - c\right].$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ -a = 1 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = -1 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int (x^2 + x + 1)e^{-x}dx = e^{-x}(-x^2 - 3x - 4) + c_1;\ \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

ملاحظة. يمكن مكاملة هذا النوع من الدوال بإستعمال طريقة التكامل بالتجزئة .

الفصل الثالث

المصفوفات و المحددات

عناوين الفصل :

3.1 المصفوفات

تعريف 1.1.3. نسمي مصفوفة من النوع $(m \times n)$ أو (m, n) كل تطبيق من $\{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}$ نحو $\mathbb{K}$. نرمز للمصفوفة ب .... $\mathcal{A}, \mathcal{B},$ أي :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} :& E \longrightarrow \mathbb{K} \\ & (i, j) \mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

نكتب عناصر المصفوفة على شكل جدول كمايلي:

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} هو العنصر الموجود في المصفوفة $\mathcal{A}$ في الموضع تقاطع السطر i مع العمود j. عدد أسطر المصفوفة $\mathcal{A}$ هو m و عدد أعمدة $\mathcal{A}$ هو n.

مثال 1.1.

1. $\mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ مصفوفة من النوع $(2, 2)$.

2. $\mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ مصفوفة من النوع (2×3).

3. $\mathcal{M} \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$ مصفوفة من النوع (1×1).

ملاحظة. نرمز لمجموعة المصفوفات من النوع (m, n) بمعاملات في $\mathbb{K}$ بالرمز $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

3.1.1 المصفوفة المربعة

نقول عن مصفوفة $\mathcal{A}$ مربعة إذا كان عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها $(n = m)$.

3.1.2 أثر مصفوفة

لتكن $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ مربعة من النوع $(n \times n)$ نسمي أثر مصفوفة $\mathcal{A}$ مجموع عناصر القطر أي:

$$Tr(\mathcal{A}) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

3.1.3 منقول مصفوفة

لتكن ; $\mathcal{A}(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K});$ نسمي منقول المصفوفة $\mathcal{A}$ و المعرفة $\mathcal{A}^t$ كمايلي : هي مصفوفة من النوع $(n \times m)$ و الناتجة عن تبديل أسطر و أعمدة $\mathcal{A}$.

مثال 2.1.

1. $\mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{B}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{A}^t \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\mathcal{C}\begin{pmatrix}1\,3\,7\\2\,5\,0\end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{C}^t\begin{pmatrix}1\,2\\3\,5\\7\,0\end{pmatrix}$

3.1.3.1 خواص المنقول

1. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^t=\mathcal{A}^t+\mathcal{B}^t$.
2. $(\lambda\mathcal{A})^t=\lambda\mathcal{A}^t$.
3. $(\mathcal{A}^t)^t=\mathcal{A}$.
4. $(\mathcal{A}.\mathcal{B})^t=\mathcal{B}^t.\mathcal{A}^t$.

ملاحظة.

1. نقول أن $\mathcal{A}$ مصفوفة متناظرة إذا كان $\mathcal{A}=\mathcal{A}^t$.
2. نقول أن $\mathcal{A}$ مصفوفة ضد متناظرة إذا كان $\mathcal{A}=-\mathcal{A}^t$.

3.2 عمليات على المصفوفات

3.2.1 الجمع

لتكن $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ حيث : $\mathcal{A}(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}};\mathcal{B}(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ نسمي مجموع المصفوفتين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ المصفوفة $\mathcal{C}$ المعرفة كمايلي : $\mathcal{C}(c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ حيث : $\forall i,j : c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

مثال 1.2. لتكن: $\mathcal{A}\begin{pmatrix}1&-2\\3&7\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}\begin{pmatrix}5&-2\\0&1\end{pmatrix}$; $\mathcal{C}\begin{pmatrix}1\,5\,0\\3\,2\,7\end{pmatrix}$.

أحسب $\mathcal{A}+\mathcal{B};\ \ \mathcal{A}+\mathcal{C}$ إن أمكن؟.

لدينا:

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-4\\3&8\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}+\mathcal{C}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\,5\,0\\3\,2\,7\end{pmatrix}\quad \text{غير معرف}$$

.

ملاحظة. لا يعرف جمع المصفوفات إلا من أجل المصفوفات من نفس النوع.

3.2.2 الضرب بسلمية

لتكن $\mathcal{A}(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ نعرف : $\lambda\mathcal{A}=\lambda(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$.

مثال 2.2. $\mathcal{A}\begin{pmatrix}3&-1\\2&5\end{pmatrix}\longrightarrow 3\mathcal{A}\begin{pmatrix}9&-3\\6&15\end{pmatrix}$.

نتيجة 3.2.1. مجموعة المصفوفات من النوع $(n\times m)$ و التي نرمز لها بالرمز $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ مزودة بجمع المصفوفات و جداء مصفوفة بثابت لها بنية فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$.

3.2.3 جداء مصفوفتين

لتكن $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{k\times l}(\mathbb{K}), \mathcal{B} \in \mathcal{M}_{l\times n}(\mathbb{K})$ نسمي جداء المصفوفتين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ المصفوفة $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ و المعرفة ب $\mathcal{C}(c_{ij})$ من النوع $(k \times n)$ حيث $c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \times b_{kj}$ حيث c_{ij} هو ناتج ضرب السطر i من المصفوفة $\mathcal{A}$ في العمود j من المصفوفة $\mathcal{B}$ معاملا معاملا .

ملاحظة.

1. حتى يمكن إجراء حاصل ضرب مصفوفتين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة $\mathcal{A}$ يساوي عدد أسطر المصفوفة $\mathcal{B}$.
2. ضرب المصفوفات ليس تبديلي .
3. لتكن $\mathcal{A}$ مصفوفة مربعة ، تكون المصفوفة $\mathcal{A}$ مثلثية علوية إذا كانت جميع عناصرها الواقعة تحت القطر معدومة و بالمثل تسمى مصفوفة مثلثية سفلية إذا كانت جميع عناصرها الواقعة فوق القطر معدومة .
4. المصفوفة الحيادية هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي تساوي 1 و باقي العناصر معدومة و نرمز لها بالرمز $\mathcal{I}_n$ إذا كانت من النوع $(n \times n)$.

مثال 3.2. 1. لتكن $\mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathcal{C}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. أحسب إذا أمكن : $A \times B;\ \mathcal{B} \times \mathcal{A};\ \mathcal{A} \times \mathcal{C}$.

لدينا :

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 16 \\ -4 & 26 \end{pmatrix} ;\ \mathcal{B} \times \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} \times \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ غير معرف}$$

.

2. $\mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ مصفوفة مثلثية علوية .

3. $\mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ مصفوفة مثلثية سفلية .

3.3 المحددات

تعريف 1.3.3.

1. لتكن $\mathcal{A}$ مصفوفة مربعة ، محدد المصفوفة $\mathcal{A}$ هو العدد الحقيقي الناتج من عمليات تتم على عناصر المصفوفة $\mathcal{A}$ و نرمز له بالرمز $\det |\mathcal{A}|$ أو $|\mathcal{A}|$.
2. محدد مصفوفة من الدرجة 2:

لتكن $\mathcal{A}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. محدد المصفوفة $\mathcal{A}$ هو: $\det \mathcal{A} = a \times d - b \times c$.

3. محدد المصفوفة من الدرجة ≤ 3 يعطى بالعلاقة :

$$\det \mathcal{A} = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \mathcal{M}_{ij}$$

حيث : (a_{ij}) العنصر الناتج عن تقاطع السطر i مع العمود j و $\mathcal{M}_{ij}$ محدد المصفوفة من الدرجة $(n-1)$.

مثال 1.3. أحسب محدد المصفوفة

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

لدينا:

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

.

خواص 3.3.1.

1. إنعدام أحد أسطر أو أعمدة المصفوفة يؤدي إلى إنعدام محددها .
2. إذا كان في محدد عمود مساويا أو مضاعفا لاخر فالمحدد معدوم .
3. قيمة المحدد لا تتغير بإضافة لعمود مزجا خطيا .
4. ضرب عناصر عمود في ثابث λ يعود إلى ضرب قيمة المحدد في λ.
5. تبديل عمودين فيما بينهما يعود إلى ضرب قيمة المحدد في القيمة (-1).
6. $\det \mathcal{A} = \det \mathcal{A}^t;\ \det(\mathcal{A}\times\mathcal{B}) = \det(\mathcal{B}\times\mathcal{A})\ ;\ \det(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \neq \det\mathcal{A} + \det\mathcal{B}$.
7. إعتمادا على الخاصية (6)، الخواص من (1) إلى (5) تبقى صالحة من أجل الأسطر .
8. محدد مصفوفة قطرية يساوي جداء عناصر القطر .
9. رتبة مصفوفة

تعريف 2.3.3. لتكن $\mathcal{A}$ مصفوفة مربعة، رتبة المصفوفة $\mathcal{A}$ هي درجة أكبر مصفوفة جزئية من المصفوفة $\mathcal{A}$ محددها غير معدوم .

تعريف 3.3.3. رتبة المصفوفة $\mathcal{A}$ هو أكبر عدد ممكن من الأعمدة (الأسطر) المستقلة خطيا .

مثال 2.3. لتكن $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \mathcal{A}$، عين رتبة المصفوفة $\mathcal{A}$.

نلاحظ أن السطرين 1 و 3 متناسبان أي $\det \mathcal{A} = 0 \Longleftarrow rang\mathcal{A} < 3$. لدينا $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longleftarrow rang\mathcal{A} = 2$.

3.4 حساب مقلوب مصفوفة

ليكن $\mathbb{K}$ حقل تبديلي و $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ نقول أن $\mathcal{A}$ قابلة للقلب إذا أمكن وجود $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ بحيث : $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \mathcal{B} \times \mathcal{A} = \mathcal{I}_n$.
نرمز ل $\mathcal{B}$ ب $\mathcal{A}^{-1}$ و $\mathcal{I}_n$ المصفوفة الحيادية من الرتبة n.

مثال 1.4. لتكن $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{A}$. أوجد $\mathcal{A}^{-1}$.

لدينا : $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \times \mathcal{A} = \mathcal{I}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2c = 1, \\ 2d = 0, \\ a + c = 0, \\ b + d = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}, \\ d = 0, \\ a = \frac{-1}{2}, \\ b = 1. \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4.1 خواص منقول مصفوفة

1. $(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$.
2. $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1} \times \mathcal{A}^{-1}$.

نظرية 1.4.3. الشرط اللازم و الكافي لوجود $\mathcal{A}^{-1}$ هو $(\det \mathcal{A} \neq 0) \Leftrightarrow (\mathcal{A}^{-1})$موجود.

3.4.2 طريقة أخرى لحساب مقلوب مصفوفة

لتكن $\mathcal{A}$ مصفوفة مربعة محددها غير معدوم فإننا نعرف مقلوب المصفوفة $\mathcal{A}$ كمايلي :

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} (\mathcal{A}^*)^t .$$

حيث : $\mathcal{A}^*$ تسمى مرافق المصفوفة $\mathcal{A}$ و تحسب بالعلاقة : $\mathcal{A}^* = (a^*_{ij}) = (-1)^{i+j} \times \mathcal{M}_{ij}$. و $\mathcal{M}_{ij}$ هو المحدد الناتج عن حذف السطر i و العمود j.

مثال 2.4. 1. لتكن $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \mathcal{A}_1$. عين $\mathcal{A}_1^{-1}$ إن وجد؟

لدينا : $\det \mathcal{A} = 7 \neq 0$ و بالتالي $\mathcal{A}^{-1}$ موجود، و يحسب بالعلاقة

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} (\mathcal{A}^*)^t .$$

تعيين المصفوفة المرافقة للمصفوفة $\mathcal{A}$.
عناصرها : $a^*_{11} = 5;\ a^*_{12} = -4;\ a^*_{22} = 1;\ a^*_{21} = -3$. و بالتالي :

$$\mathcal{A}^* \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. لتكن $\mathcal{A}_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. عين $\mathcal{A}_2^{-1}$ إن وجد؟.

لدينا $\det \mathcal{A}_2 = -5 \neq 0 \Longleftarrow$ $\mathcal{A}_2^{-1}$موجود. نعين $\mathcal{A}_2^{-1}$ بالعلاقة

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathcal{A}} \left(\mathcal{A}^*\right)^t .$$

تعيين عناصر المصفوفة المرافقة:

$$a_{11}^* = +1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -3; \ a_{21}^* = -1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4; \ a_{31}^* = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$a_{12}^* = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \ a_{22}^* = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2; \ a_{23}^* = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$a_{13}^* = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; \ a_{23}^* = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5; \ a_{33}^* = +1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

و منه:

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Longleftarrow \left(\mathcal{A}^*\right)^t \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Longleftarrow \mathcal{A}^* \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

3.5 المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي

ليكن E و F فضاءين شعاعيين بعداهما n و m على الترتيب ، و ليكن $f : E \longrightarrow F$ و $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ أساس للفضاء الشعاعي E و $B' = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ أساس للفضاء الشعاعي F.

تعريف 1.5.3. نسمي المصفوفة المرافقة للتطبيق f بالنسبة للأساسين $\{B, B'\}$ المصفوفة التي أعمدتها هي صور أساس مجموعة الإنطلاق مكتوبة في أساس مجموعة الوصول أي :

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m \\ f(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{m2}v_m \\ &\vdots \\ f(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_n) \end{array} \\ \mathcal{M}(f) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & \end{pmatrix} \end{array}$$

المصفوفة $\mathcal{M}(f)$ من النوع $(m \times n)$.

عدد أسطر المصفوفة $\mathcal{M}(f)$ يمثل بعد الفضاء الشعاعي F أي $\dim F = m$، أما عدد أعمدةالمصفوفة $\mathcal{M}(f)$ يمثل بعد الفضاء الشعاعي E أي $\dim E = n$.

نظرية 1.5.3. لكل تطبيق خطي $f : E \longrightarrow F$ توجد مصفوفة واحدة مرافقة لهذا التطبيق، و لكل مصفوفة $\mathcal{A}$ ذات m سطر و n عمود يوجد تطبيق خطي وحيد معرف من فضاء شعاعي بعده n نحو فضاء شعاعي بعده m بحيث أن $\mathcal{A}$ هي المصفوفة المرافقة لهذا التطبيق بالنسبة لأساسي الفضاءين الشعاعيين E و F.

مثال 1.5. 1. ليكن :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ X &\longmapsto f(x,y) = (x+y, x-y) \end{aligned}$$

و ليكن الأساسين : $B_1 = \{e_1(1,0), e_2(0,1)\}\,;\ B_2 = \{e'_1(2,1), e'_2(2,2)\}$.

عين المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساسين $\{B_1, B_2\}$.

لدينا :

$$\mathcal{M}(f) \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

من جهة أخرى :

$$f(1,0) = a_{11}(2,1) + a_{21}(2,2);\ \ f(0,1) = a_{12}(2,1) + a_{22}(2,2).$$

و منه: $a_{11} = 0;\ a_{21} = \dfrac{1}{2};\ a_{12} = 2;\ a_{22} = -\dfrac{3}{2}$.

$$\mathcal{M}(f) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2. لتكن $\mathcal{A}$ مصوفة حيث :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة $\mathcal{A}$ بالنسبة للأساسين القانونيين .

لدينا المصفوفة بثلاث أعمدة أي مجموعة الإنطلاق $\mathbb{R}^3$ ، و بسطرين أي مجموعة الوصول $\mathbb{R}^2$.

لدينا الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^3$ هو $\{e_1(1,0,0), e_2(1,0,0), e_3(0,0,1)\}$ و الأساس القانوني ل $\mathbb{R}^2$ هو $\{e'_1(1,0), e'_2(0,1)\}$.

و منه:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x + y - z, y + z)$$

. أي:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ X &\longmapsto f(X) = (2x + y - z, y + z)\,. \end{aligned}$$

ملاحظة. ليكن E_3, E_2, E_1 ثلاث فضاءات شعاعية على الحقل التبديلي $\mathbb{K}$ و $f : E_1 \longrightarrow E_2$ تطبيق خطي مصفوفته المرافقة $\mathcal{B}$، و $g : E_2 \longrightarrow E_3$ تطبيق خطي مصفوفته المرافقة $\mathcal{A}$ فإن $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ هي المصفوفة المرافقة للتطبيق $(g \circ f)$.

3.6 القيم و الأشعة الذاتية لمصفوفة

لتكن $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ فإن الشعاع الغير معدوم X يسمى شعاعا ذاتيا للمصفوفة $\mathcal{A}$ إذا كان $\mathcal{A}X = \lambda X$ حيث λ تسمى قيمة ذاتية للمصفوفة $\mathcal{A}$. لإيجاد القيم الذاتية للمصفوفة $\mathcal{A}$ نضع المعادلة $\mathcal{A}X = \lambda X$ على الشكل $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\,X = 0$ و التي لها حل غير معدوم إذا و فقط إذا كان $\det\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$.

مثال 1.6. 1. أوجد الأشعة و القيم الذاتية للمصفوفة $\mathcal{A}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

لدينا:
$$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda-2)(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \vee \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

من أجل $\lambda = 1$ لدينا:
$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = -y$$

$$\Longrightarrow y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} X$$ و منه : $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي للمصفوفة $\mathcal{A}$.

من أجل $\lambda = 2$
$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = -2y$$

$$\Longrightarrow y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} X$$ و منه : $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتي للمصفوفة $\mathcal{A}$.

2. أوجد القيم و الأشعة الذاتية للمصفوفة $\mathcal{A}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.7 جمل المعادلات الخطية

تعريف 1.7.3. تسمى جملة معادلات خطية كل جملة من الشكل :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تسمى مجاهيل أما $b_1, b_2, \ldots, b_m$ يسمى الطرف الثاني للجملة (S). a_{ij} تسمى معاملات.

ملاحظة. إذا كان الطرف الثاني للجملة (S) معدوم تسمى (S) جملة خطية متجانسة .

مثال 1.7. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$ جملة ثلاث معادلات خطية .

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية

الملاحـــق

قائمة المراجــع

[1] الهنوف الجوير. شرح طريقة تثبيت بيئة اللاتك وكيفية بناء تقرير علمي باستخدام هذه اللغة البرمجية . http://www.tech-wd.com/wd/2009/04/07/latex. 25 سبتمبر 2009 .

[2] أ.سليم بو. مجموعة محبي LaTeX. https://www.facebook.com/groups/latex.fans/. 2015 .

[3] بلمرابط أمنة. مذكرة تخرج: كيفية كتابة النصوص العلمية ومعادلات الرياضيات بإستعمال LaTeX. ENSET-Skikda . 2013 .

[4] ب.يوسف عتيق. مدخل الى TeXو LaTeXو ArabTeX و لاتخ العربي. المدرسة العليا للأساتذة بالقبة.03ديسمبر 2013.

[5] د.محمد فوزي بن للّونة. كتابة العربية باستخدام LaTeX. 2015.

[6] د. مصطفى العليوي. تطويع واستخدام نظام لاتخ في تطوير المحتوى الرقمي العربي. Polycopie 2012 .

[7] طلاب الدراسات العليا الرياضيات التطبيقية ،بإشراف الدكتورة : برلنت مطيط. بوابتك إلى عالم اللاتيك. سوريا. 10-2-2013 .

[8] عبدالرزاق براهيمي ,صالح الدين موفق ،بإشراف الأستاذ يوسف عتيق . TeXArab و LaTeXو TeXولاتخ العربي ، مذكرة تخرج لنيل شهادةأستاذ التعليم الثانوي . ENS -Vieux Kouba- (Alger). 23 جوان 2012 .

[9] منتدى وادي التقنية. TeX andLaTeX. http://www.tech-wd.com/wd/2009/04/07/latex. 29 مارس 2008 .

[10] يوسف عدنان رفة . كتابة LaTeXباللغة العربية . 10 مارس 2013 .

[11] Kacem BOUKRAA. مدونة قاسم. LaTeX. http://www.kacemb.com/. 04 أفريل 2013 .

[12] Arnaud GAZAGNES. LaTeX... pour le prof de maths! , Aide-mémoire, astuces et approfondissements. 17 janvier 2016.

[13] Donald Arseneau. The cases package. asnd@triumf.ca. May 2002.

[14] Dr. Christian Feuersàanger. Manual for Package pgfplots, 2D/3D Plots in LaTeX, Version 1.12. http://sourceforge.net/projects/pgfplots. 2015/01/31.

[15] Gérard Tisseau, Jacques Duma. TikZ pour l'impatient. 14 janvier 2015.

[16] wikibooks. https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX. 2016.